数理解析研究所講究録
第 1609 巻 2008 年 88-101

Schramm-Loewner Evolution 入門

中央大学理工学部物理学科　**香取眞理 (KATORI, Makoto)**

Department of Physics, Chuo University

27 March 2008

概 要

Schramm-Loewner Evolution (SLE) について解説する．統計物理学における背景については，解説記事 [4] を参照していただきたい．

1　複素上半平面内の曲線と共形変換

複素平面を $\mathbb{C}$, その上半平面を $\mathbb{H}=\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}\,(z)>0\}$ と書くことにする．また $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$ とする．実軸上の一点 $\gamma(0)\in\mathbb{R}$ を出発点として，時間 $t\in[0,\infty)$ とともに単調に伸びていく曲線

$$\gamma=\gamma[0,t],\quad t\in[0,\infty)$$

を考える．まずは**単純曲線**(自分自身と接したり交わったりしない曲線) を考えることにし，また $\gamma(0,\infty)\in\mathbb{H}$ とする．**リーマンの写像定理**と **Möbius 変換**に関する初等的な知識より，各時刻 $t>0$ において，

$$z+\frac{a(t)}{z}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right),\quad a(t)\in\mathbb{R},\quad z\to\infty \tag{1.1}$$

という漸近形をもつ

$$\mathbb{H}\setminus\gamma(0,t]\quad\to\quad\mathbb{H}$$

なる**共形変換**が唯一存在することを示すことができる．ここで，共形変換といったときには，等角の全単射を意味するものとする．この共形変換を $g_{\gamma(0,t]}(z)$ または $g_t(z)$ と書くことにする．$g_0(z)=z$ とする．

注 1. この変換 g_t によって，領域 $\mathbb{H}\setminus\gamma(0,t]$ の境界のうち，$\gamma(0,t]\cup\mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$ に，無限遠点 ∞ は無限遠点 ∞ に写される．

この第 1 節では $t\in(0,\infty)$ を固定して考えることにする．

$B_s^j, j=1,2$ を 2 つの独立な 1 次元標準ブラウン運動 (BM) として，$\mathbb{C}$ 上の複素 BM を

$$\mathcal{B}_s = B_s^1 + \mathrm{i}\, B_s^2, \quad s\in[0,\infty) \tag{1.2}$$

で定義する．いま，$\mathbb{H}\setminus\gamma(0,t]$ の内点 z からスタートした複素 BM を考え，これがこの領域の境界である $\gamma(0,t]\cup\mathbb{R}$ のいずれかの点に初めて到達する時刻を

$$\tau_t = \inf\{s\geq 0 : \mathcal{B}_s\in\gamma(0,t]\cup\mathbb{R}\} \tag{1.3}$$

と書くことにする．$z-g_t(z)$ は $\mathbb{H}\setminus\gamma(0,t]$ で有界な正則関数であり，その実部と虚部はそれぞれ調和関数である．ここでは虚部

$$\phi_t(z) = \mathrm{Im}\,(z-g_t(z)), \quad z\in\mathbb{H}\setminus\gamma(0,t] \tag{1.4}$$

を考えることにすると，これは

$$\phi_t(z) = \mathbf{E}^z[\phi_t(\mathcal{B}_{\tau_t})], \quad z\in\mathbb{H}\setminus\gamma(0,t] \tag{1.5}$$

と与えることができる．よって

$$\phi_t(z) = \mathbf{E}^z[\mathrm{Im}\,(\mathcal{B}_{\tau_t})] - \mathbf{E}^z[\mathrm{Im}\,(g_t(\mathcal{B}_{\tau_t}))] = \mathbf{E}^z[\mathrm{Im}\,(\mathcal{B}_{\tau_t})]$$

となる．ここで，$\mathcal{B}_{\tau_t}\in\mathbb{H}\setminus\gamma(0,t]$ であるので注 1 より $g_t(\mathcal{B}_{\tau_t})\in\mathbb{R}$ であることを用いた．したがって

$$\mathrm{Im}\,(g_t(z)) = \mathrm{Im}\,(z) - \mathbf{E}^z[\mathrm{Im}\,(\mathcal{B}_{\tau_t})], \quad z\in\mathbb{H}\setminus\gamma(0,t] \tag{1.6}$$

という表式が得られる．いま

$$R_t = \sup\{|\gamma(s)-\gamma(0)| : s\in(0,t]\} \tag{1.7}$$

とする．つまり $\gamma(0,t]$ は $\gamma(0)$ を中心とする半径 R_t の半円 $\mathrm{B}(\gamma(0),R_t)\cap\mathbb{H}$ の中に含まれることになる．この半円の外の $\mathbb{H}$ の点 $z\in\mathbb{H}\setminus\mathrm{B}(\gamma(0),R_t)$ に対して，この点からスタートした複素 BM を考えることにする．この複素 BM が $\mathrm{B}(\gamma(0),R_t)\cap\mathbb{H}$ の半円周上，または実軸に初めて到達する時刻を σ と書くことにする;

$$\sigma=\inf\{s\geq 0:\mathcal{B}_s\in\mathrm{B}(\gamma(0),R_t)\cup\mathbb{R}\}.$$

このとき，到達点 $\mathcal{B}_\sigma$ の半円上の分布密度を $p(z,\gamma(0)+R_te^{i\theta}),\theta\in(0,\pi)$ と書くことにすると，複素 BM の**強マルコフ性**より

$$\mathbf{E}^z[\mathrm{Im}\,(\mathcal{B}_\tau)]=\int_0^\pi p(z,\gamma(0)+R_te^{i\theta})\mathbf{E}^{\gamma(0)+R_te^{i\theta}}[\mathrm{Im}\,(\mathcal{B}_\tau)]R_td\theta \tag{1.8}$$

が成り立つ．この半円上の密度は，上半平面から半円 $\mathrm{B}(\gamma(0),R_t)\cap\mathbb{H}$ を除いた領域

$$D=\{z\in\mathbb{H}:|z-\gamma(0)|>R_t\}$$

における**ポアソン核**であり，

$$p(z,\gamma(0)+R_te^{i\theta})=-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n\theta)R_t^{n-1}\mathrm{Im}\left[\frac{1}{(z-\gamma(0))^n}\right],\quad z\in D,\quad \theta\in(0,\pi) \tag{1.9}$$

で与えられる．曲線 $\gamma[0,t]$ は，その出発点 $\gamma(0)$ を中心とする半径 R_t の円に含まれる．したがって，この曲線を実軸に沿って $-\gamma(0)$ だけ平行移動して原点からスタートするようにした後，全体を $1/R_t$ に拡大または縮小して得られる曲線を $\widetilde{\gamma}[0,t]$ と書くことにすると，これは原点を中心とする単位円に含まれることになる．

$$\widetilde{\tau}_t=\inf\{s\geq 0:\mathcal{B}_s\in\widetilde{\gamma}(0,t]\cup\mathbb{R}\} \tag{1.10}$$

とすると，複素 BM の**スケーリング性**よりこの分布は τ_t/R_t^2 の分布に等しく，

$$\mathbf{E}^{\gamma(0)+R_te^{i\theta}}[\mathrm{Im}\,(\mathcal{B}_{\tau_t})]=R_t\mathbf{E}^{e^{i\theta}}[\mathrm{Im}\,(\mathcal{B}_{\widetilde{\tau}_t})],\quad\theta\in(0,\pi) \tag{1.11}$$

である．これらの結果を (1.6) に代入すると

$$\mathrm{Im}\,(g_t(z))=\mathrm{Im}\left(z+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}(t)}{(z-\gamma(0))^n}\right) \tag{1.12}$$

となる．ただし

$$a_n(t) = R_t^n \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin((n-1)\theta) \mathbf{E}^{e^{i\theta}}[\mathrm{Im}\,(\mathcal{B}_{\widetilde{\tau}_t})] d\theta, \quad n = 2, 3, 4, \cdots \tag{1.13}$$

である．

g_t は (1.1) という漸近形をもつ共形変換（正則関数）であるので，これより

$$g_t(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}(t)}{(z - \gamma(0))^n}, \quad z \in \mathbb{H} \setminus \gamma(0, t] \tag{1.14}$$

と定まることになる．

$0 \leq \theta \leq \pi$ のとき，$n = 2, 3, \cdots$ に対して $|\sin(n\theta)| \leq c_n \sin\theta$ となる有限な値 c_n をとることができる．よって

$$\begin{aligned} |a_n(t)| &\leq R_t^n \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |\sin((n-1)\theta)| \mathbf{E}^{e^{i\theta}}[\mathrm{Im}\,(\mathcal{B}_{\widetilde{\tau}_t})] d\theta \\ &\leq c_{n-1} R_t^n \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin\theta \mathbf{E}^{e^{i\theta}}[\mathrm{Im}\,(\mathcal{B}_{\widetilde{\tau}_t})] d\theta \\ &\leq c_{n-1} R_t^{n-2} a_2(t), \quad n = 3, 4, 5, \cdots \end{aligned} \tag{1.15}$$

という評価が得られる．

注 2.　(1.13) で特に $n = 2$ とすると

$$a_2(t) = R_t^2 \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin\theta\, \mathbf{E}^{e^{i\theta}}[\mathrm{Im}\,(\mathcal{B}_{\widetilde{\tau}_t})] d\theta \tag{1.16}$$

という表式が得られることになるが，上で与えた議論を逆にたどると

$$a_2(t) = \lim_{y \to \infty} \mathbf{E}^{iy}[\mathrm{Im}\,(\mathcal{B}_{\tau_t})] \tag{1.17}$$

であることが分かる．この量は曲線 $\gamma(0, t]$ の**半平面 capacity** ($\mathrm{hcap}(\gamma(0, t])$ と書く）とよばれている．

注 3.　$H_t = \mathbb{H} \setminus \gamma(0, t]$ におけるポアソン核を $p_{H_t}(z, w), z \in H_t, w \in \partial H_t = \widetilde{\gamma}(0, t] \cap \mathbb{R}$ と書くと，

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{e^{i\theta}}[\mathrm{Im}\,(\mathcal{B}_{\widetilde{\tau}_t})] &= \int_{\partial H_t} p_{H_t}(e^{i\theta}, w) \mathrm{Im}\,(w) dw \\ &= \int_{\widetilde{\gamma}(0,t]} p_{H_t}(e^{i\theta}, w) \frac{\mathrm{Im}\,(w)}{\mathrm{Im}\,(e^{i\theta})} dw \times \mathrm{Im}\,(e^{i\theta}) \\ &= \sin\theta \int_{\widetilde{\gamma}(0,t]} \widehat{p}_{H_t}(e^{i\theta}, w) dw \end{aligned}$$

となる．ここで

$$\widehat{p}_D(z,w) \equiv p_D(z,w)\frac{\mathrm{Im}\,(w)}{\mathrm{Im}\,(z)}, \quad z \in D, \quad w \in \partial D \tag{1.18}$$

としたが，これは次式で定義される $\mathbb{H}$-excursion $\widehat{\mathcal{B}}_s$ のポアソン核になっている [7]:

$$\widehat{\mathcal{B}}_s = B_s + \mathrm{i}\,X_s, \quad s \in [0,\infty). \tag{1.19}$$

ここで B_s はBMであり，X_s はこれと独立な **3 次元ベッセル過程** (BES$_3$) である．したがって上の量は $\sin\theta\,\mathbf{P}^{e^{\mathrm{i}\theta}}\Big(\widehat{\mathcal{B}}[0,\infty)\cap\widetilde{\gamma}(0,t]\neq\emptyset\Big)$ となるので，係数 $a_n(t)$ に対しては

$$a_n(t) = R_t^n \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin((n-1)\theta)\sin\theta\,\mathbf{P}^{e^{\mathrm{i}\theta}}\Big(\widehat{\mathcal{B}}[0,\infty)\cap\widetilde{\gamma}(0,t]\neq\emptyset\Big)\,d\theta \tag{1.20}$$

という $\mathbb{H}$-excursion と曲線 $\widetilde{\gamma}(0,t]$ との交叉確率を用いた表式も得られる．

2 レブナーの微分方程式

この第 2 節では，時間を連続的に変化させて $\mathbb{H}$ 内の曲線 γ とそれに伴う共形変換 $g_t(x)$ の時間発展を追うことにする．$\varepsilon > 0$ として，時刻 $t+\varepsilon$ までの曲線 $\gamma(0,t+\varepsilon]$ を考える．これに対応する共形変換 $g_{t+\varepsilon}(z)$ は次のような合成で与えられる．

$$\begin{aligned} g_{t+\varepsilon}(z) &= g_{\gamma(0,t+\varepsilon]}(z) \\ &= \Big[g_{g_t(\gamma(t,t+\varepsilon])}\circ g_t\Big](z) = g_{g_t(\gamma(t,t+\varepsilon])}(g_t(z)). \end{aligned} \tag{2.1}$$

この共形変換 $g_{t+\varepsilon}(z)$ によって，$\mathbb{H}\backslash\gamma(0,t+\varepsilon]$ は $\mathbb{H}$ に写される．しかし，$\mathbb{H}\backslash\gamma(0,t+\varepsilon]$ を $g_{t+\varepsilon}(z)$ ではなく $g_t(z)$ で写すと，像は $\mathbb{H}$ ではなく $\mathbb{H}\setminus g_t(\gamma(t,t+\varepsilon])$ となる．これは $\mathbb{H}$ から曲線 $g_t(\gamma(t,t+\varepsilon])$ を除いた領域である．この曲線の出発点にあたる実軸上の点を U_t と書くことにする．すなわち

$$U_t = \lim_{s\nearrow t} g_s(\gamma(t)) \tag{2.2}$$

とする.（当然 $U_0 = \gamma(0)$ である.）すると，前節の結果 (1.14) より

$$\begin{aligned} g_{t+\varepsilon}(z) &= g_{g_t(\gamma(t,t+\varepsilon])}(g_t(z)) \\ &= g_t(z) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}((t,t+\varepsilon])}{(g_t(z)-U_t)^n} \end{aligned} \tag{2.3}$$

という形に書けることになる．ただしここで

$$R_t^\varepsilon = \sup\Big\{|g_t(\gamma(s)) - U_t| : s \in [t, t+\varepsilon]\Big\}, \tag{2.4}$$

として，

$$|a_n((t, t+\varepsilon])| \le c_{n-1}(R_t^\varepsilon)^{n-2} a_2((t, t+\varepsilon]), \quad n = 3, 4, 5, \cdots \tag{2.5}$$

である．また，(2.3) の右辺の $g_t(z)$ に (1.14) を代入して展開したものは，(1.14) で $t \to t+\varepsilon$ としたものに等しいはずであり，その双方の $1/z$ の係数を比べることにより

$$a_2((t, t+\varepsilon]) = a_2(t+\varepsilon) - a_2(t). \tag{2.6}$$

という半平面 capacity の加法性が導かれる．

以上より

$$\left| g_{t+\varepsilon}(z) - g_t(z) - \frac{a_2(t+\varepsilon) - a_2(t)}{g_t(z) - U_t} \right| \le \sum_{n=2}^{\infty} \frac{c_n (R_t^\varepsilon)^{n-1}}{|g_t(z) - U_t|^n} (a_2(t+\varepsilon) - a_2(t))$$

という不等式が得られることになる．この両辺を ε で割ると

$$\left| \frac{g_{t+\varepsilon}(z) - g_t(z)}{\varepsilon} - \frac{1}{g_t(z) - U_t} \frac{a_2(t+\varepsilon) - a_2(t)}{\varepsilon} \right| \le \sum_{n=2}^{\infty} \frac{c_n (R_t^\varepsilon)^{n-1}}{|g_t(z) - U_t|^n} \times \frac{a_2(t+\varepsilon) - a_2(t)}{\varepsilon}$$

となるが，ここで $\varepsilon \to 0$ の極限をとることにする．半平面 capacity $a_2(t) = \mathrm{hcap}(\gamma(0, t])$ は一般に t について狭義単調増加関数であり連続であるが，さらに微分可能であり

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{a_2(t+\varepsilon) - a_2}{\varepsilon} = \frac{da_2(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \mathrm{hcap}(\gamma(0, t]) \tag{2.7}$$

が存在するものと仮定する．また定義より $\lim_{\varepsilon \to 0} R_t^\varepsilon = 0$ であるから，上の評価より

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{g_{t+\varepsilon}(z) - g_t(z)}{\varepsilon} = \frac{\partial g_t(z)}{\partial t}$$

が存在し，これは次の微分方程式を満たすことが結論される．

$$\frac{\partial g_t(z)}{\partial t} = \frac{1}{g_t(z) - U_t} \frac{da_2(t)}{dt}, \quad a_2(t) = \mathrm{hcap}(\gamma(0, t]). \tag{2.8}$$

ただし，初期条件は $g_0(z) = z$ である．これを**レブナーの微分方程式 (Loewner evolution)** という．

注 4.　上の (2.7) のところで，$a_2(t) = \mathrm{hcap}(\gamma(0,t])$ が微分可能であることを仮定した．一般に $a_2(t)$ は t について狭義単調増加関数であり，連続であることが示せる [7]．したがって，曲線 γ を (時刻 t の代わりに) 半平面 capacity そのものでパラメトライズすることが可能である．特に通常は

$$\overline{\gamma}(t) = \gamma(a_2^{-1}(2t))$$

とおくことにする．この定義より

$$a_2(t) = \mathrm{hcap}(\overline{\gamma}((0,t])) = 2t \tag{2.9}$$

となるので，レブナー方程式は

$$\frac{\partial g_t(z)}{\partial t} = \frac{2}{g_t(z) - U_t}, \quad g_0(z) = z \tag{2.10}$$

となる．(以下では，(2.9) である $\overline{\gamma}$ を改めて γ と記すことにする．) この方程式から生成される g_t を特に **Loewner chains** とよぶ．また U_t をレブナー方程式の**駆動関数**とよぶことにする．

レブナー方程式に展開式 (1.14) を代入すると，展開係数 $a_n(t)$ に対して階層的な方程式系が得られる：

$$\frac{d}{dt}a_n(t) = 2\mathcal{P}_n(a_1(t), a_2(t), \cdots), \quad n = 2, 3, 4, \cdots. \tag{2.11}$$

ただし

$$a_1(t) = -U_t \tag{2.12}$$

とした．また，多項式 $\mathcal{P}_n(x_1, x_2, \cdots)$ は次の漸化式によって与えられる [1].

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}_1 = 0, \qquad \mathcal{P}_2 = 1, \\ &\mathcal{P}_n = -\sum_{j=1}^{n-2} x_j \mathcal{P}_{n-j}, \quad n \geq 2. \end{aligned} \tag{2.13}$$

具体的には

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}a_2(t) = 2, \qquad \frac{d}{dt}a_3(t) = -2a_1(t), \\ &\frac{d}{dt}a_4(t) = 2\Big\{(a_1(t))^2 - a_2(t)\Big\}, \\ &\frac{d}{dt}a_5(t) = 2\Big\{-(a_1(t))^3 + 2a_2(t)a_1(t) - a_3(t)\Big\}, \qquad \cdots \end{aligned} \tag{2.14}$$

である．$g_0(z) = z$ なので $a_n(0) = 0$, $n = 1, 2, 3, \cdots$ である．駆動関数 $a_1(t) = -U_t$ が与えられると，上の方程式系によりすべての展開係数 $a_n(t), n = 2, 3, \cdots$ が決まり，共形変換 $g_t(z)$ が定まることになる．つまり，レブナー方程式は無限個の**階層的な微分方**程式系と等価であることになる．

3 SLE$_\kappa$ と BES$_d$

Schramm [9] は, レブナー方程式の駆動関数として

$$U_t = \sqrt{\kappa} B_t, \quad \kappa > 0, \quad B_0 = 0 \tag{3.1}$$

とした．ここで B_t は 1 次元標準 BM である：

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - \sqrt{\kappa} B_t}, \quad g_0(z) = z. \tag{3.2}$$

この初期値問題の解として得られる (時刻 $t \geq 0$ でパラメトライズされる) 共形変換の族 $\{g_t\}_{t \geq 0}$ を **(chordal) シュラム・レブナー発展 (Schramm-Loewner evolution)** という．以下ではこれを，パラメータ κ も付して，SLE$_\kappa$ と略記する. ((3.2) をシュラム・レブナー方程式とよぶことにする.)

第 1 節と第 2 節では，時間 $t \in [0, \infty)$ とともに単調に伸びていく単純曲線 $\gamma = \{\gamma(t) : t \in [0, \infty)\}$ を与え，各時刻 $t \in [0, \infty)$ で $\mathbb{H} \setminus \gamma(0, t] \to \mathbb{H}$ となる共形変換 $g_t(z)$ を求める問題を考えた．$g_t(z)$ はレブナー方程式 (2.10) の解として与えられることが分かった．この方程式は

$$U_t = \lim_{s \nearrow t} g_s(\gamma(t)) \tag{3.3}$$

で駆動される形をしていた．これに対して，ここでは U_t を確率過程 (3.1) として与え，確率的なレブナー方程式 (3.2) を解くことにより，ランダムに時間発展する共形変換 $g_t(z)$ を求める問題を考えるのである．この場合にも，(3.3) によって $\gamma(t), 0 \leq t < \infty$ が定められることになる．次が知られている．

定理 3.1 *SLE$_\kappa$* で定められる γ は，確率 1 で曲線である．

注 5. 上の主張は,「確率 1 で, SLE_κ は曲線によって生成される」という言い方でも表現される. また γ は, SLE_κ の道 (SLE_κ path), または SLE_κ 曲線 (SLE_κ curve) とよばれる. これは, ある確率法則に従うランダムな曲線である. 定理 3.1 の証明は文献 [7] を参照せよ.

SLE_κ γ は一般には単純曲線ではない. 以下,

$$\begin{aligned} H_t &= \mathbb{H} \setminus \gamma[0,t] \text{ の非有界な連結領域} \\ K_t &= \mathbb{H} \setminus H_t \end{aligned} \tag{3.4}$$

とする. K_t は SLE_κ 曲線 $\gamma[0,t]$ の hull とよばれる. $g_t(z)$ は $H_t \to \mathbb{H}$ の共形変換である. つまり H_t は写像 g_t の定義域である. 他方, K_t に対しては, g_t は定義されないことになる. SLE_κ 曲線 γ は時間 t とともに単調に伸びていくものとすると, hull K_t も単調に増大していくことになる. よって g_t の定義域 H_t は単調に減少していくことになる. 各 $z \in \mathbb{H}$ に対して

$$\begin{aligned} T_z &= \sup\left\{t \geq 0 : \text{解 } g_t(z) \text{ が well-defined で } g_t(z) \in \mathbb{H}\right\} \\ &= \inf\{t \geq 0 : z \in K_t\} \end{aligned} \tag{3.5}$$

が定義される. これを用いると

$$\begin{aligned} H_t &= \{z \in \mathbb{H} : T_z > t\} \\ K_t &= \{z \in \mathbb{H} : T_z \leq t\} \end{aligned} \tag{3.6}$$

と表せる.

特に SLE_κ 曲線 γ の時刻 $t > 0$ での先端 $\gamma(t)$ は, その時刻での共形写像 g_t で実軸上の点 $\sqrt{\kappa}B_t$ に写されることになる:

$$g_t(\gamma(t)) = \sqrt{\kappa}B_t. \tag{3.7}$$

ただし, 厳密に言うと, 上述のように g_t の定義域は H_t であり, $\gamma(t) \in K_t$ であって $\gamma(t) \notin H_t$ なので, $g_t(\gamma(t))$ は定義されていない. 上の式は, 定義域 H_t と値域 $\mathbb{H}$ のいずれにおいても, それぞれの境界上の点への極限として

$$\lim_{z \to \gamma(t)} g_t(z) = \sqrt{\kappa}B_t \tag{3.8}$$

という意味で理解すべきである.

SLE$_\kappa$ 曲線 $\gamma = \{\gamma(t) : 0 \le t < \infty\}$ が与えられたとする．このとき，各時刻 $s \ge 0$ に対して，γ^s を

$$\gamma^s(t) = g_s(\gamma(t+s)) - \sqrt{\kappa}B_s, \quad t \ge 0$$

で与えられる曲線であるとする．このとき，

$$\gamma^s \stackrel{\mathrm{d}}{=} \gamma \qquad \forall s \ge 0 \tag{3.9}$$

が成り立つことになる．(ここで，等号 $\stackrel{\mathrm{d}}{=}$ は分布 (distribution) が等しいことを意味する．) この意味で SLE$_\kappa$ は**マルコフ性**をもつことになる．また，SLE$_\kappa$ は BM と同様の**スケーリング性**も持つ．

命題 3.2 任意の $r > 0$ に対して

$$\frac{1}{r} g_{r^2t}(rz) \stackrel{\mathrm{d}}{=} g_t(z) \tag{3.10}$$

が成り立つ．すなわち，$\widetilde{\gamma}(t) \equiv \dfrac{1}{r}\gamma(r^2t)$ とすると

$$\widetilde{\gamma} \stackrel{\mathrm{d}}{=} \gamma \tag{3.11}$$

である．

ここで

$$\widehat{g_t}(z) = \frac{g_t(z) - \sqrt{\kappa}B_t}{\sqrt{\kappa}} \tag{3.12}$$

とすると，$\widehat{g_t}(z)$ は次の**確率微分方程式** (SDE) を満たすことになる．

$$d\widehat{g_t}(z) = \frac{2/\kappa}{\widehat{g_t}(z)}dt + dW_t, \quad \widehat{g}_0(z) = \frac{z}{\sqrt{\kappa}}, \quad W_t = -B_t. \tag{3.13}$$

T_z の定義 (3.5) より，SLE$_\kappa$ 曲線 γ は時刻 $t = T_z$ で初めて $z \in \mathbb{H}$ に到達する．つまり $\lim_{t \nearrow T_z} \gamma(t) = z$ であり，この先端 $\gamma(t)$ の像は (3.7) のように $\sqrt{\kappa}B_{T_z}$ であるから，(3.12) より

$$\lim_{t \nearrow T_z} \widehat{g_t}(z) = 0$$

となる．つまり，T_z は $z/\sqrt{\kappa}$ から出発して SDE (3.13) に従って動く $\overline{\mathbb{H}}$ 上の点が，初めて原点 0 に到達する時刻ということになる．

特に SDE (3.13) で式で $z \to x \in \mathbb{R}$ としてみると，注 1 で述べたように $g_t(x) \in \mathbb{R}, \forall t \geq 0$ なので $\widehat{g}_t(x) \in \mathbb{R}, \forall t \geq 0$ である．したがって，SLE$_\kappa$ を実軸上で考えたものは，d 次元ベッセル過程 (BES$_d$)

$$dX_t^x = \frac{d-1}{2}\frac{1}{X_t^x}dt + dW_t, \quad X_0^x = x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \tag{3.14}$$

で

$$\kappa = \frac{4}{d-1} \iff d = \frac{4}{\kappa} + 1 \tag{3.15}$$

とおいたものに等しい.（ベッセル過程については，例えば [6] を参照．）このときには，明らかに $T_x = \inf\{t \geq 0 : X_t^x = 0\}$ である．各 x に対して同じ BM, W_t をとることにする．$x < y$ なら $X_t^x < X_t^y, \forall t < T_x$ なので，$T_x \leq T_y$ である．d 次元ベッセル過程に対して，次が証明できる（例えば，[5] を参照．）

(1) $d \geq 2$ のとき，確率 1 で $T_x = \infty, \forall x > 0$.

(2) $1 \leq d < 2$ のとき，確率 1 で $T_x < \infty, \forall x > 0$.

 (2a) $\frac{3}{2} < d < 2$ のとき，$0 < x < y$ に対して，$\mathbf{P}\{T_x = T_y\} > 0$.

 (2b) $1 \leq d \leq \frac{3}{2}$ のとき，$0 < x < y$ ならば確率 1 で $T_x < T_y$.

これに対応して，SLE$_\kappa$ で生成される曲線 γ には，パラメータ κ の値に応じて，次のような 3 つの相があることが導かれる．

定理 3.3 *(i)* $0 < \kappa \leq 4$ のとき，γ は単純曲線であり，$\gamma(0,\infty) \subset \mathbb{H}$ である．また，このとき確率 1 で

$$\lim_{t \to \infty} |\gamma(t)| = \infty. \tag{3.16}$$

(ii) $4 < \kappa < 8$ のとき，γ は自分自身や実軸と接することがあるが，確率 1 で

$$\bigcup_{t>0} \overline{K_t} = \overline{\mathbb{H}} \tag{3.17}$$

である．よって，$|\gamma(t)| \to \infty$ である．しかし

$$\gamma[0,\infty) \cap \mathbb{H} \neq \mathbb{H} \tag{3.18}$$

である．つまり，$\mathbb{H}$ 全体を埋めつくすことはない．

(iii) $\kappa \geq 8$ のとき，γ は $\overline{\mathbb{H}}$ のすべての点を埋めつくす；

$$\gamma[0,\infty) = \overline{\mathbb{H}}. \tag{3.19}$$

<u>**注 6.**</u> 2 次元格子上の**統計物理模型**の連続 (スケーリング) 極限と，次のように対応していることが "知られている [3]".

$$\begin{aligned}
\kappa = 2 \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{loop-erased random walk (LERW)} \\
\kappa = \frac{8}{3} = 2.\dot{6} \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{self-avoiding walk (SAW)} \\
\kappa = 4 \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{臨界 4 状態ポッツ模型} \\
\kappa = \frac{24}{5} = 4.8 \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{臨界 3 状態ポッツ模型} \\
\kappa = \frac{16}{3} = 5.\dot{3} \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{臨界イジング模型} \\
\kappa = 6 \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{臨界パーコレーション模型} \\
\kappa = 8 \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{uniform spanning tree (UST)}
\end{aligned} \tag{3.20}$$

(q 状態ポッツ模型の $q=2$ がイジング模型，$q=1$ がパーコレーション模型，$q=0$ が UST にそれぞれ対応する．κ との対応は $q = 2+2\cos(8\pi/\kappa), 4 \leq \kappa \leq 8$ である.) 上のような対応を厳密に証明するには，SLE の話とは別に，格子模型の連続極限の存在とそこでの共形不変性を示さなければならない．$\kappa = 2$ (LERW) の場合は正方格子上に対して [8] によって厳密な証明が与えられている．また, $\kappa = 6$ の場合には，三角格子上の臨界パーコレーションに対して Smirnov によって証明が与えられている [10]. 最近 Smirnov は，臨界イジング模型と SLE に関する論文を発表している (arXiv: math-ph で得られる).

4 SLE マルチンゲール

再び $g_t(z)$ の展開係数 $a_n(t), n = 1, 2, 3, \cdots$ を考える．SLE_κ では

$$a_1(t) = -U_t = -\sqrt{\kappa}B_t \tag{4.1}$$

としたので，$a_n(t)$ は一般には確率過程となる ($a_2(t) = 2t$ は決定論的)．上のように $a_1(t)$ はマルチンゲールであるが，(2.14) 式は $a_n(t)$, $n \geq 2$ は**有界変動過程**であることを示している．$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots)$, $\boldsymbol{a}(t) = (a_1(t), a_2(t), \cdots)$ と書くことにする．$Q(\boldsymbol{x})$ を多変数 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ の実係数多項式としたとき，確率過程 $Q(\boldsymbol{a}(t))$ に対する SDE は，**伊藤の公式**より

$$dQ(\boldsymbol{a}(t)) = \left[-\sqrt{\kappa} dB_t \frac{\partial}{\partial x_1} + dt \left(\frac{\kappa}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2 \sum_{n\geq 2} \mathcal{P}_n(\boldsymbol{x}) \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \right] Q(\boldsymbol{x}) \bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}(t)}$$

で与えられる．ここで $(da_1(t))^2 = \kappa dt$ と (2.11) を用いた．したがって，微分演算子

$$\mathcal{A} = \frac{\kappa}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2 \sum_{n\geq 2} \mathcal{P}_n(\boldsymbol{x}) \frac{\partial}{\partial x_n} \tag{4.2}$$

を定義して，$\mathcal{A}M(\boldsymbol{x}) = 0$ なる多項式 $M(\boldsymbol{x})$ が得られると，局所マルチンゲール $M(\boldsymbol{a}(t))$ が求められることになる．このような局所マルチンゲールは，多変数 $\{x_n\}_{n\geq 2}$ の階層性に従って

$$\begin{aligned} & a_1(t) \\ & 2(a_1(t))^2 - \kappa a_2(t) \\ & 2(a_1(t))^3 - 3\kappa a_1(t) a_2(t) \quad \text{および} \quad a_3(t) + a_1(t) a_2(t) \\ & \quad \cdots \end{aligned} \tag{4.3}$$

というように階層的に定めていくことができる．これらは **SLE マルチンゲール**とよばれている [1].

Bauer と Bernard によって，これらのマルチンゲールの成す代数構造と**ビラソロ代数**の中心元 $c = (3\kappa - 8)(6 - \kappa)/2\kappa$ と共形次元 (最高ウェイト) $h = (6 - \kappa)/2\kappa$ で指定される表現 (**共形場理論**) との関係が詳しく研究されている [1]. ([2] も参照．)

参考文献

[1] M. Bauer and D. Bernard, SLE matringales and the Virasoro algebra, *Phys. Lett.* **B 557** (2003) 309-316.

[2] R. Friedrich and W. Werner, Conformal restriction, highest-weight representations and SLE, *Commun. Math. Phys.* **243** (2003) 105-122.

[3] W. Kager and B. Nienhuis, A guide to stochastic Löwner evolution and its application, *J. Stat. Phys.* **115** (2004) 1149-1229.

[4] 香取眞理,「臨界現象・フラクタル研究の新世紀– SLE の発見 –」, 日本物理学会誌, Vol.**62**, No.7 (2007) 527-531.

[5] 香取眞理,「Schramm-Loewner Evolution (SLE) and Conformal Restriction」, 保型形式・無限可積分系合同合宿 (2007 年 9 月 6-9 日, 八王子セミナーハウス) で配布した講義ノート. http : //www.phys.chuo – u.ac.jp/j/katori/

[6] 香取眞理, 種村秀紀,「ランダム行列と非衝突過程」,『数理物理への誘い 6』(小嶋泉編) 第 6 話, 遊星社, 2006 年.

[7] G. F. Lawler, *Conformally Invariant Processes in the Plane*, (American Mathematical Society, 2005).

[8] G. Lawler, O. Schramm, and W. Werner, Conformal invariance of planar loop-erased random walks and uniform spanning trees, *Ann. Probab.* **32** (2004) 939-995.

[9] O. Schramm, Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees, *Israel J. Math.* **118** (2000) 221-228.

[10] S. Smirnov, Critical percolation in the plane: conformal invariance, Cardy's formula, scaling limit, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **333** (2001) 239-244.